

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2020,
Convocatoria extraordinaria

mentoor.es



Problema 1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$
 siendo a un parámetro real, obtener

razonadamente:

- El estudio del sistema en función del parámetro a .
- Las soluciones del sistema cuando $a=-2$.
- La solución del sistema cuando $a=0$.

Solución:

- El estudio del sistema en función del parámetro a .

Para estudiar el sistema, aplicaré el Teorema de Rouché-Frobenius. Análizo el determinante de la matriz de coeficientes, A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1(a-1) - 1(1-a) + a(1-a^2) = a-1 + a-1 + a-a^3 = -a^3 + 3a - 2$$

Igualamos a cero para encontrar los valores críticos: $-a^3 + 3a - 2 = 0$. Usando Ruffini, las raíces son $a = 1$ (doble) y $a = -2$. La factorización es $|A| = -(a-1)^2(a+2)$.

Caso 1: $a \notin \{1, -2\}$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. Sistema **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $a = 1$. $|A| = 0$. La matriz A es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

La 1ª y 3ª fila son incompatibles. $\text{Rg}(A) = 1, \text{Rg}(A^*) = 2$. Sistema **Incompatible (S.I.)**.

Caso 3: $a = -2$. $|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

La 3ª fila es la suma de las dos primeras multiplicada por -1 . $\text{Rg}(A^*) = 2$. Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

S.C.D. si $a \notin \{1, -2\}$; S.C.I. si $a = -2$; S.I. si $a = 1$.

- Las soluciones del sistema cuando $a=-2$.

Es un S.C.I. Usamos las dos primeras ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$



Restando (Ec1-Ec2): $3y - 3z = 0 \implies y = z$.

Sustituyendo $y = z$ en la primera: $x + z - 2z = 1 \implies x - z = 1 \implies x = 1 + z$.

Sea $z = \lambda \in \mathbb{R}$.

La solución es $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

c) La solución del sistema cuando $a=0$.

Es un S.C.D. con $|A| = -2$. Usamos la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

La solución es $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.

Problema 2. Geometría

Sea la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$.

- El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r .
- La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$.
- La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$.

Solución:

- El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r .**

El vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$. El vector de la recta que pasa por P y Q es $\vec{PQ} = (1, 1, \alpha)$. Para que sean paralelas, sus vectores deben ser proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{-1} \implies 1 = \frac{\alpha}{-1} \implies \alpha = -1.$$

$$\boxed{\alpha = -1.}$$

- La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$.**

Para $\alpha = 1$, $Q(2, 1, 1)$. El plano π contiene a $P(1, 0, 0)$ y tiene como vectores directores a $\vec{PQ} = (1, 1, 1)$ y al vector director de r , $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies (x-1)(-2) - y(-2) + z(0) = 0$$

$$-2x + 2 + 2y = 0 \implies x - y - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{El plano es } x - y - 1 = 0.}$$

- La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$.**

Para $\alpha = 1$, $Q(2, 1, 1)$. El plano π' es perpendicular a r , por lo que su vector normal es $\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r = (1, 1, -1)$. Su ecuación es $x + y - z + D = 0$.

Pasa por $P(1, 0, 0)$: $1 + 0 - 0 + D = 0 \implies D = -1$. El plano es $\pi' : x + y - z - 1 = 0$.

La distancia de Q a π' es:

$$d(Q, \pi') = \frac{|2 + 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{d(Q, \pi') = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades.}}$$

Problema 3. Análisis

Se da la función real definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

- El dominio y las asíntotas de la función f .
- La integral $\int f(x)dx$ así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,0)$.
- El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 2, x = 4$.

Solución:

- El dominio y las asíntotas de la función f .

Dominio: $x^2(x-1) = 0 \implies x = 0, x = 1$. $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Hay asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 1$.

A. Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \implies \text{A.H. en } y = 0$$

$$\boxed{\text{Dominio: } \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \text{ A.V.: } x = 0, x = 1. \text{ A.H.: } y = 0.}$$

- La integral $\int f(x)dx$ así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,0)$.

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$. Resolviendo: $A = -2, B = -1, C = 2$.

$$\int \left(\frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -2 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + K$$

La primitiva $F(x)$ pasa por $(2,0)$: $F(2) = -2 \ln(2) + 1/2 + 2 \ln(1) + K = 0 \implies K = 2 \ln(2) - 1/2$.

$$\boxed{F(x) = -2 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + 2 \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

- El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 2, x = 4$. La función es positiva en $[2, 4]$. El área es la integral definida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^4 f(x)dx = \left[-2 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| \right]_2^4 \\ &= (-2 \ln 4 + \frac{1}{4} + 2 \ln 3) - (-2 \ln 2 + \frac{1}{2} + 2 \ln 1) = -4 \ln 2 + \frac{1}{4} + 2 \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = 2 \ln(3/2) - 1/4 \approx 0.5606 \text{ u}^2.}$$



Problema 4. Álgebra

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$ que dependen del parámetro real b .

- Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.
- Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A .
- La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista.

Solución:

- Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

$$AB = \begin{pmatrix} -3+2b & 2b^2 & 0 \\ -b & 0 & -2b \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |AB| = 0 \text{ para todo } b.$$

AB no tiene inversa para ningún valor de b .

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -b-3 & -4 \end{pmatrix}, \quad |BA| = 12 - 2(b+3) = 6 - 2b$$

$|BA| = 0 \iff b = 3$. BA tiene inversa si $b \neq 3$.

AB nunca tiene inversa. BA tiene inversa si $b \neq 3$.

- Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A .

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$|A^T A| = 8(2+b^2)$. Esto es cero si $b^2 = -2$, lo cual no tiene solución real.

$A^T A$ tiene inversa para todo $b \in \mathbb{R}$.

- La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista.

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{8(2+b^2)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$



Problema 5. Geometría

Se dan el plano $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 0)$.

- La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π .
- Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r .
- La distancia entre el punto B y la recta r .

Solución:

- La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π .**

El plano π' contiene a A y B, y es perpendicular a π . Sus vectores directores son $\vec{AB} = (1, -1, 1)$ y el normal de π , $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

El vector normal de π' será $\vec{n}_{\pi'} = \vec{AB} \times \vec{n}_\pi = (0, 3, 3)$, que es proporcional a $(0, 1, 1)$.

La ecuación es $y + z + D = 0$. Pasa por $A(1, 2, -1)$: $2 - 1 + D = 0 \implies D = -1$.

El plano es $y + z - 1 = 0$.

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r .**

La recta r pasa por A y su vector director es $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

De la forma continua $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, obtenemos los planos:

$$x - 1 = 2(y - 2) \implies x - 2y + 3 = 0.$$

$$-(y - 2) = z + 1 \implies y + z - 1 = 0.$$

Planos: $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

- La distancia entre el punto B y la recta r .**

Usamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta: $d(B, r) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$.

$$\vec{AB} = (1, -1, 1), \vec{v}_r = (2, 1, -1).$$

$$\vec{AB} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 3, 3)$$

$$d(B, r) = \frac{\sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

La distancia es $\sqrt{3}$ unidades.



Problema 6. Análisis

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

- La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.
- Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$.
- La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Solución:

- La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.

La altura h sobre el lado desigual x divide el triángulo en dos triángulos rectángulos. Por Pitágoras:

$$h^2 + (x/2)^2 = 10^2 \implies h = \sqrt{100 - x^2/4}$$

El área del triángulo es $A(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.

$$A(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}.$$

- Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$.

Para facilitar la derivación, podemos optimizar $g(x) = A(x)^2$, ya que el área es positiva.

$$g(x) = \frac{x^2}{16}(400 - x^2) = 25x^2 - \frac{x^4}{16}$$

$$g'(x) = 50x - \frac{4x^3}{16} = 50x - \frac{x^3}{4}$$

$g'(x) = 0 \implies x(50 - x^2/4) = 0$. Soluciones: $x = 0$ (extremo del intervalo) y $x^2 = 200 \implies x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Estudiamos el signo de $g'(x)$ (y por tanto de $A'(x)$) en el dominio $[0, 20]$.

Intervalo	$(0, 10\sqrt{2})$	$(10\sqrt{2}, 20)$
Signo $A'(x)$	+	-
$A(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

Creciente en $(0, 10\sqrt{2})$ y decreciente en $(10\sqrt{2}, 20)$.

- La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Del estudio de monotonía, el máximo se alcanza en el punto crítico $x = 10\sqrt{2}$. La longitud del tercer lado es $x = 10\sqrt{2}$ cm. El área máxima es:

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{2}}{4}\sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = \frac{10\sqrt{2}}{4}\sqrt{400 - 200} = \frac{10\sqrt{2}}{4}\sqrt{200} = \frac{10\sqrt{2}}{4}(10\sqrt{2}) = \frac{100 \cdot 2}{4} = 50$$

La longitud es $x = 10\sqrt{2}$ cm. El área máxima es 50 cm².

